ТЕПЛОФИЗИКА

Лекция №10

План лекции:
1. Применение теории подобия в анализе конвективного теплообмена
2. Связь между теплоотдачей и терением

1. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В АНАЛИЗЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Вспомним, что **теория подобия** - это учение о подобных явлениях. Теория подобия позволяет на основании отдельных опытов или результатов численного моделирования получить обобщенную зависимость и открывает возможность изучения рабочих процессов технических устройств на моделях.

Подобные явления характеризуются **константами подобия**, которые сохраняют числовое значение только для двух подобных явлений, но остаются одинаковыми для всех сходственных точек рассматриваемых систем, и **числами подобия,** которые сохраняют свое значение в сходственных точках всех подобных между собой систем, но в различных точках одной и той же системы числа имеют разные значения.

Числами подобия удобно пользоваться при обработке опытных данных или численных расчетов, когда на основании изучения единичных явлений необходимо получить обобщенную зависимость, пригодную для всех подобных явлений.

Формулы связи между числами подобия называются уравнениями подобия.

Вспомним, что для дифференциального уравнения теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{-\left(\lambda_{ж} \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ст}}{T_{ж} - T_{ст}} \tag{1}$$

мы получили следующий набор констант и чисел подобия:

$$C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'};\quad C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'};\quad C_T = \frac{T''}{T'};\quad C_y = \frac{y''}{y'};$$

$$\frac{C_\lambda}{C_\alpha C_y} = 1 \qquad . \tag{2}$$

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha' y'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' y''}{\lambda''} = \frac{\alpha y}{\lambda} = idem}$$

Приведённое соотношение носит название числа Нуссельта.

С физической точки зрения константы подобия представляют собой отношение масштабов величин. Например, при обтекании плоской пластины за масштаб линейных размеров можно выбрать длину пластины, тогда:

$$\frac{y''}{L''} = \frac{y'}{L'}, \tag{3}$$

Отсюда константа подобия C_y может быть представлена, как:

$$C_y = \frac{y''}{y'} = \frac{L''}{L'} \tag{4}$$

Число Нуссельта в этом случае можно представить в виде:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = idem} \tag{5}$$

Число Нуссельта характеризует собой интенсивность теплообмена.

По аналогии можно получить числа подобия и для других физических процессов: трение, интенсивность диффузии, интенсивность вынужденного и свободного движения среды и т.д. Система дифференциальных уравнений теплообмена, позволяет выявить структуру этих чисел. В сокращённой форме систему уравнений теплообмена можно записать следующим образом:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial w_{x_j}}{\partial x_j} = 0; \\
\frac{\partial w_{x_i}}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{2} w_{x_j} \frac{\partial w_{x_i}}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 w_{x_i}}{\partial x_j{}^2} \right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_{x_i} \\
\frac{\partial T}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{2} w_{x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j{}^2} \right) \\
p = \rho R T \\
x_1 = x, \quad x_2 = y
\end{array}} \tag{6}$$

При постоянных значениях вязкости, теплопроводности и теплоёмкости газа необходимо ввести следующие константы подобия:

$$\begin{array}{l}
\text{уравнение неразрывности } C_\tau = \frac{\tau''}{\tau'};\ C_\rho = \frac{\rho''}{\rho'};\ C_w = \frac{w_{x_i}''}{w_{x_i}'};\ C_x = \frac{x_i''}{x_i'} \\
\text{уравнение движения } C_\mu = \frac{\mu''}{\mu'};\ C_p = \frac{p''}{p'};\ C_g = \frac{g_{x_i}''}{g_{x_i}'} \\
\text{уравнение энергии } C_T = \frac{T''}{T'};\ C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'};\ C_{cp} = \frac{c_p''}{c_p'} \quad \text{уравнение состояния } C_R = \frac{R''}{R'}
\end{array} \tag{7}$$

Выражая величины τ'' и т.д. через константы подобия уравнения (6), записанное для условий " приводятся к виду:

$$\begin{array}{l}
\boxed{\frac{C_x}{C_w C_\tau}} \frac{1}{\rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial \tau'} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial w_{x_j}'}{\partial x_j'} = 0; \\
\boxed{\frac{C_x}{C_w C_\tau}} \frac{\partial w_{x_i}'}{\partial \tau'} + \sum_{j=1}^{2} w_{x_j}' \frac{\partial w_{x_i}'}{\partial x_j'} = \boxed{\frac{C_\mu}{C_\rho C_w C_x}} \frac{\mu'}{\rho'}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 w_{x_i}'}{\partial x_j'^2} \right) - \boxed{\frac{C_p}{C_\rho C_w^2}} \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \boxed{\frac{C_x C_g}{C_w^2}} g_{x_i}' \\
\boxed{\frac{C_x}{C_w C_\tau}} \frac{\partial T'}{\partial \tau'} + \sum_{j=1}^{2} w_{x_j}' \frac{\partial T'}{\partial x_j'} = \boxed{\frac{C_\lambda}{C_\rho C_w C_x C_{cp}}} \frac{\lambda'}{\rho' c_p'}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j'^2} \right) \\
\boxed{\frac{C_p}{C_\rho C_R C_T}} p' = \rho' R' T'
\end{array} \tag{8}$$

В результате можно получить ряд комплексов, которые определяют подобие течений и условий теплообмена в различных системах:

$$\frac{C_x}{C_w C_\tau}=1;\quad \frac{C_\mu}{C_\rho C_w C_x}=1;\quad \frac{C_p}{C_\rho C_w^2}=1;\quad \frac{C_x C_g}{C_w^2}=1;\quad \frac{C_\lambda}{C_\rho C_w C_x C_{cp}}=1;\quad \frac{C_p}{C_\rho C_R C_T}=1 \qquad (9)$$

Если выразить константы подобия через характерные масштабы системы:

$$C_\tau=\frac{\tau''_0}{\tau'_0};\quad C_\rho=\frac{\rho''_0}{\rho'_0};\quad C_w=\frac{w''_0}{w'_0};\quad C_x=\frac{L''}{L'}$$
$$C_\mu=\frac{\mu''_0}{\mu'_0};\quad C_p=\frac{p''_0}{p'_0};\quad C_g=\frac{g''}{g'};\quad C_T=\frac{\Delta T''}{\Delta T'},\text{ то} \qquad (10)$$
$$C_\lambda=\frac{\lambda''_0}{\lambda'_0};\quad C_{cp}=\frac{c_p{}''_0}{c_p{}'_0};\quad C_R=\frac{R''_0}{R'_0}$$

комплексы (9) можно преобразовать к виду:

$$\frac{w'_0\tau'_0}{L'}=\frac{w''_0\tau''_0}{L''}\quad\text{или}\quad \boxed{Ho=\frac{w_0\tau_0}{L}}-\text{число гомохронности} \qquad (11)$$

Число гомохронности характеризует нестационарность процесса движения и его используют при изучении теплообмена в нестационарных (например, пульсирующих) потоках.

$$\frac{\rho'_0 w'_0 L'}{\mu'_0}=\frac{\rho''_0 w''_0 L''}{\mu''_0}\quad\text{или}\quad \boxed{Re=\frac{\rho_0 w_0 L}{\mu_0}}-\text{число Рейнольдса} \qquad (12)$$

Число Рейнольдса отражает интенсивность вынужденного движения газа или жидкости.

$$\frac{p'_0}{\rho'_0 w'^2_0}=\frac{p''_0}{\rho''_0 w''^2_0}\quad\text{или}\quad \boxed{Eu=\frac{p_0}{\rho_0 w_0^2}}-\text{число Эйлера} \qquad (13)$$

Число Эйлера определяет подобие полей давления. В задачах теплообмена это число является однозначной функцией числа Рейнольдса, и потому в уравнения подобия не вводится.

$$\frac{L'g'}{w'^2_0}=\frac{L''g''}{w''^2_0}=\frac{g\rho_0^2\mu_0^2L^3}{\rho_0^2w_0^2\mu_0^2L^2}=\frac{1}{Re^2}\frac{\rho_0^2gL^3}{\mu_0^2} \qquad (14)$$

Вводя понятие коэффициента объёмного расширения $\beta=(\rho_0-\rho)/(\rho(T_0-T))$ комплекс (14) можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{Re^2}\frac{\rho_0^2gL^3\beta\Delta T}{\mu_0^2\beta\Delta T}=\frac{Gr}{Re^2\beta\Delta T}$$
$$\boxed{Gr=\frac{\rho_0^2gL^3\beta\Delta T}{\mu_0^2}}-\text{число Грасгофа} \qquad (15)$$

Число Грасгофа определяет интенсивность свободноконвективного движения.

$$\frac{\rho'_0 w'_0 L' c_p{}'_0}{\lambda'_0}=\frac{\rho''_0 w''_0 L'' c_p{}''_0}{\lambda''_0}\quad\text{или}\quad \boxed{Pe=\frac{w_0L}{\dfrac{\lambda_0}{\rho_0 c_{p0}}}=\frac{w_0L}{a_0}}-\text{число Пекле} \qquad (16)$$

Число Пекле отражает интенсивность конвективного переноса тепла по сравнению с переносом тепла теплопроводностью. Не трудно заметить, что число Пекле можно представить в виде:

$$\boxed{\begin{aligned}&Pe=\frac{\rho_0 w_0 L}{\mu_0}\frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0}=Re\cdot Pr,\\&Pr=\frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0}-\text{число Прандтля}\end{aligned}} \qquad (17)$$

Число Прандтля отражает влияние свойств газа или жидкости на теплообмен.

$$\frac{p'_0}{\rho'_0 R'_0 \Delta T'}=\frac{p''_0}{\rho''_0 R''_0 \Delta T''}=1;-\text{для идеальных газов} \qquad (18)$$

Если разделить число гомохронности на число Пекле, то можно получить комплекс, который носит название **числа Фурье**.

$$\boxed{Fo=\frac{Ho}{Pe}=\frac{\tau_0 a_0}{L^2}}-\text{число Фурье} \qquad (19)$$

Число Фурье характеризует динамику нестационарной теплопроводности.

Существует ещё ряд комплексов, которые часто используются в теории теплообмена.

Число Стантона – аналог числа Нуссельта, связывающий интенсивность теплоотдачи с конвективным переносом тепла:

$$St=\frac{Nu}{Re\cdot Pr}=\frac{\alpha}{c_p\rho_0 w_0}=\frac{q_{ст}}{c_p\rho_0 w_0\Delta T} \qquad (20)$$

Коэффициент трения – отражает действие вязких сил при заданном динамическом напоре газового потока:

$$\begin{aligned}&\tau_{ст}=-\mu\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{ст}\Rightarrow C_{тр}=\frac{\tau_{ст}''}{\tau_{ст}'}\Rightarrow\tau_{ст}'=-\mu'\left(\frac{\partial w_{x_i}'}{\partial x_i'}\right)_{ст}\ \boxed{\frac{C_\mu C_w}{C_{тр}C_x}}\\&\frac{\tau_{ст}'L'}{\mu'w'_0}=\frac{\tau_{ст}''L''}{\mu''w''_0}=\frac{\tau_{ст}L\rho_0 w_0}{w_0\mu_0\rho_0 w_0}=\frac{\tau_{ст}}{\rho_0 w_0^2}\frac{\rho_0 w_0 L}{\mu_0}=\frac{c_f}{2}\cdot Re\\&\boxed{\frac{c_f}{2}=\frac{\tau_{ст}}{\rho_0 w_0^2}}\end{aligned} \qquad (21)$$

Таким образом, чтобы в результате опытного исследования процесса трения и теплоотдачи получить формулу, пригодную для оценки не только исследованных явлений, но и всех явлений, подобных исследованным, результаты опытов необходимо представить в виде **уравнений подобия**:

$$\frac{c_f}{2}=f(Ho,Re,Gr)\quad\text{и}\quad Nu=f(Ho,Re,Gr,Pr) \qquad (22)$$

В стационарных условиях уравнения подобия будут выглядеть, следующим образом:

$$\frac{c_f}{2} = f(Re, Gr) \quad и \quad Nu = f(Re, Gr, Pr) \tag{23}$$

В задачах с определяющим действием вынужденной конвекции:

$$\frac{c_f}{2} = f(Re) \quad и \quad Nu = f(Re, Pr) \tag{24}$$

В задачах свободной конвекции:

$$\frac{c_f}{2} = f(Gr) \quad и \quad Nu = f(Gr, Pr) \tag{25}$$

Для удобства обработки опытных данных уравнения подобия принято представлять в виде степенной функции:

$$\frac{c_f}{2} = c\,Re^k\,Gr^m \quad и \quad Nu = c\,Re^k\,Gr^m\,Pr^n, \tag{26}$$

где: c, k, m, n - опытные коэффициенты.

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕПЛООТДАЧЕЙ И ТЕРНИЕМ

Рассмотрим стационарное безнапорное ламинарное течение жидкости с физическими свойствами, независящими от температуры, при отсутствии массовых сил в системе. Если ось x совместить с поверхностью, с которой взаимодействует поток, то **проекцию уравнения движения на эту ось и уравнение энергии** привести к виду:

$$\begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right) \\ w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

Как видно уравнения движения и уравнение энергии очень похожи.

Уравнения (27) можно представить в безразмерном виде, введя характерные масштабные множители $\overline{w}_x = w_x / w_{x0}$; $\overline{w}_y = w_y / w_{x0}$; $\overline{x} = x / L$; $\overline{y} = y / L$; $\overline{T} = (T - T_0)/(T_{ст} - T_0)$:

$$\begin{aligned} \overline{w}_x \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{x}} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{y}} &= \frac{\mu}{\rho w_0 L}\left(\frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{y}^2}\right) \\ \overline{w}_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} &= \frac{\lambda}{\rho w_0 L c_p}\frac{\mu}{\mu}\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

При постоянной плотности, вязкости и теплопроводности газа безразмерные комплексы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \overline{w}_x \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{x}} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{y}} &= \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{y}^2}\right) \\ \overline{w}_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} &= \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

В безразмерных координатах уравнения будут иметь одно решение, если число Прандтля газа будет равно единице $Pr = 1$.

В этом случае будут равны и комплексы определяющие трение и теплообмен на поверхности стенки:

$$
-\frac{\tau_{ст}L}{w_{x0}\mu}=\left(\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial\overline{y}}\right)_{ст};\quad -\alpha\frac{\left(T_0-T_{ст}\right)}{\left(T_0-T_{ст}\right)}\frac{L}{\lambda}=\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{y}}\right)_{ст}
$$
$$
\tau_{ст}\frac{\lambda}{w_{x0}\mu}=\alpha \tag{30}
$$

Выражая напряжение трения через коэффициент трения, а коэффициент теплоотдачи через число Нуссельта получим:

$$
\rho w_{x0}w_{x0}\frac{c_f}{2}\frac{\lambda}{w_{x0}\mu}=Nu\frac{\lambda}{L}
$$
$$
\frac{\rho w_{x0}L}{\mu}\frac{c_f}{2}=Nu \tag{31}
$$
$$
\boxed{Nu=\frac{c_f}{2}Re}
$$

При значениях числа Прандтля в диапазоне от 0,6 до 1 связь трения и теплообмена может быть представлена в следующем виде:

$$
\boxed{Nu=\frac{c_f}{2}\cdot Re\cdot Pr^{0.33}} \tag{32}
$$

Зависимость между теплоотдачей и трением глубоко вскрывает физический смысл явления теплоотдачи и позволяет использовать величины коэффициентов сопротивления, определенные опытным или теоретическим путем, для оценки коэффициентов теплоотдачи.

Экспериментальное определение коэффициентов сопротивления обычно значительно проще, чем коэффициентов теплоотдачи. Поэтому для систем, явление теплоотдачи в которых экспериментальным путем не изучалось, полученные выше соотношения могут служить средством получения расчетных формул для коэффициентов теплоотдачи.